

Epreuve de mathématiques

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a prises.

Exercice 1

On considère les fonctions numériques f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)^2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{-1}{(t+1)t^2}$$

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que, quel que soit le réel t différent de 0 et de 1 on ait :

$$f(t) = \frac{a}{(1+t)^2} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{t}$$

En déduire la valeur de l'intégrale $A(x)$ définie, pour $x > 0$ par :

$$A(x) = \int_1^x f(t) dt$$

2. Calculer $g(t) - f(t)$; en déduire une primitive de la fonction numérique $(g - f)$.
3. Soit $B(x)$ l'intégrale définie, pour $x > 0$, par :

$$B(x) = \int_1^x g(t) dt$$

Montrer que $B(x) = \frac{1-x}{x} + \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$, où \ln désigne le logarithme népérien.

Quelle est la limite de $B(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Exercice 2

Soient les nombres complexes $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = -2 + 2i$.

1. Déterminer les modules et arguments de z_1 , z_2 , $z_1 \times z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, et z_1^8 .
2. Résoudre l'équation : $z^2 + 2z + 10 = 0$.

Exercice 3

Calculer

$$A = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3 \right) dx$$

$$B = \int_1^3 \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$C = \int_1^2 (x+1)e^{-3x} dx \quad (\text{on pourra utiliser une IPP})$$

$$D = \int_1^2 (2x+1)(x^2+x+1) dx$$

$$E = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du \quad (\text{changement de variable : } u = \sin^2(\theta))$$

$$F = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle définie sur \mathbb{R} par :

$$(E) \quad y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = x^2 e^{-x}$$

1. Déterminer la solution générale de $(e) \quad y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$ sur \mathbb{R} .
2. Vérifier que la fonction g , définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x^2 - 2)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation (E) .
3. Ecrire la solution générale de (E) .
4. Déterminer la fonction f telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Exercice 5

Première partie

On considère l'équation différentielle (E) définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par:

$$(E) \quad 2xy'(x) + y(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

1. Déterminer la solution générale de $(e) \quad 2xy'(x) + y(x) = 0$
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ est une solution particulière de l'équation (E)
3. Ecrire la solution générale de (E) .
4. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(1) = \ln 2$.

Deuxième partie

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0$$

et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0. En déduire que f est continue en 0. f est-elle dérivable en 0 ?
Préciser la tangente en O à la courbe représentative de f . (On pourra utiliser : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$
avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ au voisinage de 0.)

2. Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = 2x - (x+1)\ln(x+1)$$

Etudier les variations de h et montrer que la fonction h s'annule pour une unique valeur α . (On ne demande pas la représentation graphique de h). En déduire le signe de h sur $]0, +\infty[$.

3. Donner les valeurs exactes de $h(e-1)$ et $h(3e-1)$. En utilisant les inégalités : $2,7 < e < 2,8$ et $1 < \ln(3) < 1,1$ montrer que $h(3e-1) < 0$. En déduire que : $e-1 < \alpha < 3e-1$.
4. Calculer f' sur $]0, +\infty[$ et montrer que

$$f'(x) = \frac{h(x)}{2x\sqrt{x}(x+1)}$$

En déduire le tableau de variation de f .

Troisième partie

On se propose de calculer l'aire du domaine plan (D) limité par la courbe (C) , les droites $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^1 f(x) dx = 2\ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx$$

2. Faire le changement de variable $\sqrt{x} = t$ dans l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx$$

3. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel t

$$\frac{t^2}{t^2+1} = a + \frac{b}{t^2+1}$$

4. En déduire la mesure en cm^2 de l'aire de (D) .

Exercice 6

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 \ln(x)}{(x^3+1)^2}$$

1. Calculer $\int_1^2 f(x) dx$. (On pourra utiliser le changement de variable : $t = x^3$).
2. Calculer $I(a) = \int_1^a f(x) dx$. $a > 1$.
3. Déterminer la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$.